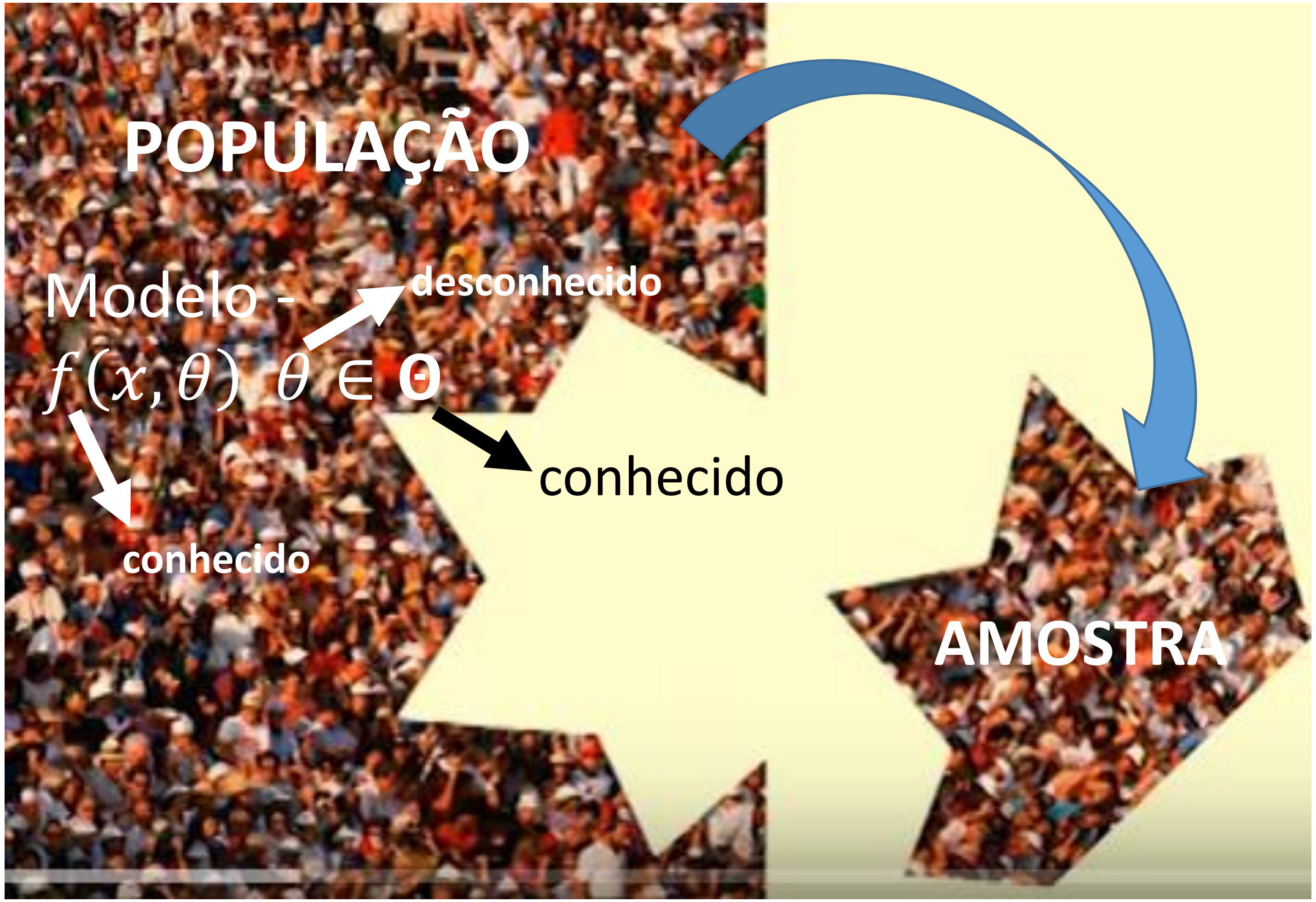
ESTIMAÇÃO



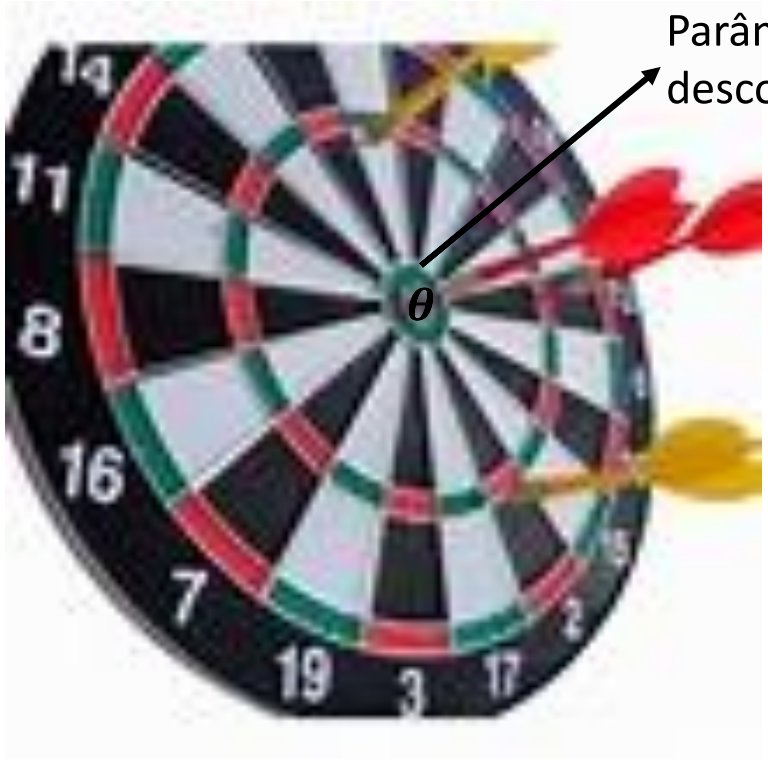
Estimar é utilizar a informação da amostra para "adivinhar" o valor de θ.

Dois aspectos a ter em, conta: a **precisão** e a **confiança.**

Ideia Importante $\rightarrow$ Fixada a dimensão da amostra, quanto mais precisa a resposta, menor a confiança que nela se deposita.

A estimação paramétrica desenvolve-se privilegiando: a precisão (**estimação por pontos**)

a confiança (**estimação por intervalos**).



Precisão tem a ver com a distância entre o centro do alvo - $\boldsymbol{\theta}$ e o ponto onde a seta acertou no alvo – **estimativa**.

Confiança tem a ver com a confiança em acertar num determinado círculo do alvo

ESTIMAÇÃO

Ter presente que o parâmetro de interesse θ pode ser:

- **Multidimensional**

Exemplo $\rightarrow$ Suponha que a valorização de um activo financeiro tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.
Observada uma amostra casual pretende-se estimar μ (rendibilidade esperada) e σ^2(risco).

- **Função do(s) parâmetro(s) da distribuição**

. Exemplo $\rightarrow$ Suponha-se que o número de sinistros originados anualmente por uma apólice de seguro automóvel tem distribuição de Poisson de parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$ (desconhecido).
Em vez de nos interessarmos pelo parâmetro (média do fenómeno) podemos estar interessados numa função de $\boldsymbol{\lambda}$, por exemplo, $P(X=0|\boldsymbol{\lambda})=e^{-\boldsymbol{\lambda}}$, probabilidade de não se verificar nenhum sinistro. Então pretende-se estimar $\tau(\boldsymbol{\lambda})=e^{-\boldsymbol{\lambda}}$ que traduz essa probabilidade

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

- **Conceitos Fundamentais:**

Estimador: é uma variável aleatória, função da amostra casual e representa-se por $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) \Rightarrow$ é uma estatística.

Por exemplo: $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \bar{X}$ média da amostra

Estimativa: é um número assumido pelo estimador para a particular amostra que se observou. Representa-se por $t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Por exemplo: $t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{x}$

- **Dois problemas em aberto**:
  - Como encontrar estimadores para determinado parâmetro?
  - Encontrado um ou mais estimadores, como avaliar a sua qualidade?

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

IDEIA

Utilizar os momentos da amostra para estimar os correspondentes momentos da população e, a partir daí, estimar os parâmetros de interesse

- Existem outros métodos de estimação por pontos: Método da máxima verosimilhança.

Método dos momentos

Momentos da população tem de existir

Momentos em relação à origem da População		Momentos empíricos ou da amostra
$\mu'_1 = E(X)$	$=$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\mu'_2 = E(X^2)$	$=$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
$\vdots$		$\vdots$
$\mu'_r = E(X^r)$	$=$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n}$

Momentos da amostra existem sempre

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

- **Formalização**:
  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população

$$f(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \quad \left(\overbrace{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k}^{desconhecidos}\right) \in \boldsymbol{\Theta}$$

- Constrói-se um sistema igualando os k 1ºs momentos da população aos k 1ºs momentos da amostra.

$$\mu_r' = \psi_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n} = \psi_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

- Resolve-se o sistema em ordem aos k parâmetros desconhecidos que se admite ter solução única $\widetilde{\theta_j} = \boldsymbol{\phi}_j(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad j = 1, 2, \cdots, k$

- Diz-se que os estimadores $\widetilde{\theta_1}, \widetilde{\theta_2}, \cdots, \widetilde{\theta_k}$ foram obtidos pelo método dos momentos

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

- Exemplo 1 Considere-se uma população de Bernoulli da qual se extraiu uma amostra casual de dimensão n com o objectivo de estimar θ.

Como se sabe:

- 1º momento da população é $\mu_1' = E(X) = \theta$
- 1º momento da amostra é $\bar{X}$
- sistema - $\bar{X} = \theta$
- solução: Estimador $\rightarrow \tilde{\theta}_{(X_1, X_2, \cdots, X_n)} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Estimativa $\tilde{\theta}_{(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ **Cuidado com a notação !**

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

• Exemplo 2 Considere-se uma população normal da qual se extraiu uma amostra casual de dimensão n com o objectivo de estimar μ e σ^2

Como se sabe:

- momentos da população: $\mu_1' = E(X) = \theta$; $Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \Rightarrow \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

- momentos da amostra: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ e $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

- sistema - $\begin{cases} \bar{X} = \mu \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$

- solução: Estimadores: $\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $\widetilde{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = S^2$

Estimativas: $\tilde{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; $\widetilde{\sigma^2} = s^2$

Cuidado com a notação !

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

(mais complicado mas origina, geralmente, estimadores melhores)

- **Definição 7.1 – Função de verosimilhança**

Se $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população com função densidade \probabilidade $f(x, \theta)$, a expressão:

$\boldsymbol{\theta \in \Theta}$ ***fixo***

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

probabilidade \ densidade probabilidade associada a uma amostra particular $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ***fixo***

$$L\left(\theta|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \quad \theta \in \boldsymbol{\Theta}$$

função de verosimilhança

Mais simplesmente referida como $L(\theta)$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

- Exemplo: considere-se um Universo com distribuição de Bernoulli de parâmetro θ.

$$X \sim B(1, \theta) \Rightarrow f(x, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \qquad x = 0, 1; \quad 0 < \theta < 1$$

Do qual se observou uma particular amostra casual simples de dimensão n $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Como obter a função de verosimilhança?

$$L(\theta | (x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$$

$$= \theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} . \theta^{x_2} (1-\theta)^{1-x_2} . \cdots . \theta^{x_n} (1-\theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n} * (1-\theta)^{1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n} =$$

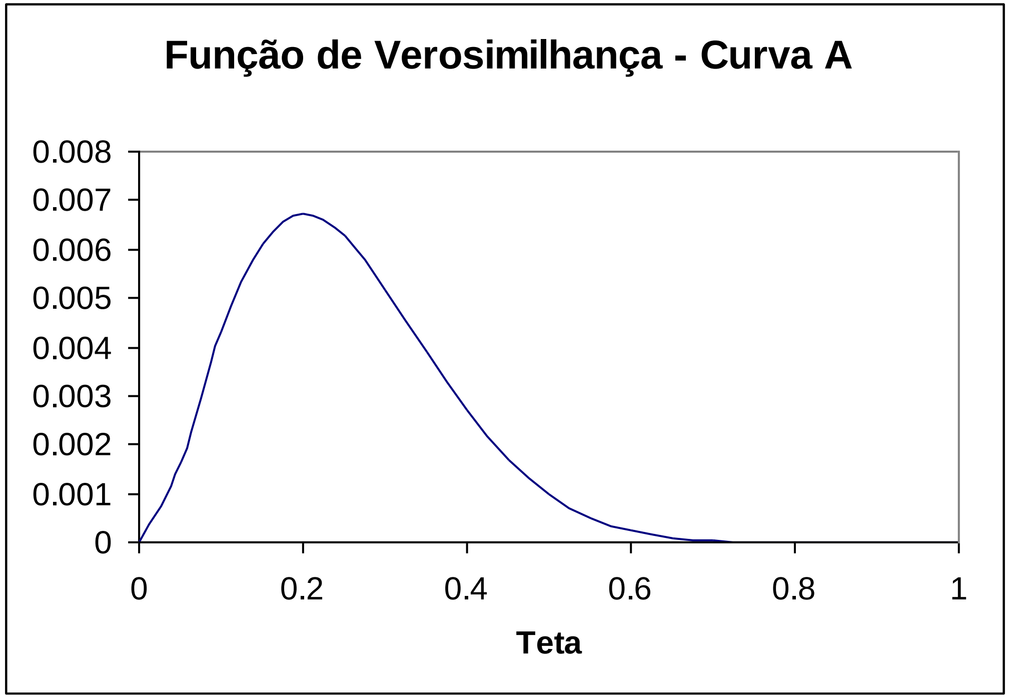
$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Nota: não é necessário conhecer cada uma das observações da amostra, bastando conhecer o valor de uma estatística adequada. Neste caso $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ou $\bar{x}$.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

- Vamos admitir que $n = 10$ e traçar a função verosimilhança para 2 situações A e B:
  - A - Observou-se $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2 \Rightarrow \text{Curva A} \rightarrow \mathrm{L}(\theta) = \theta^2(1-\theta)^{10-2}$

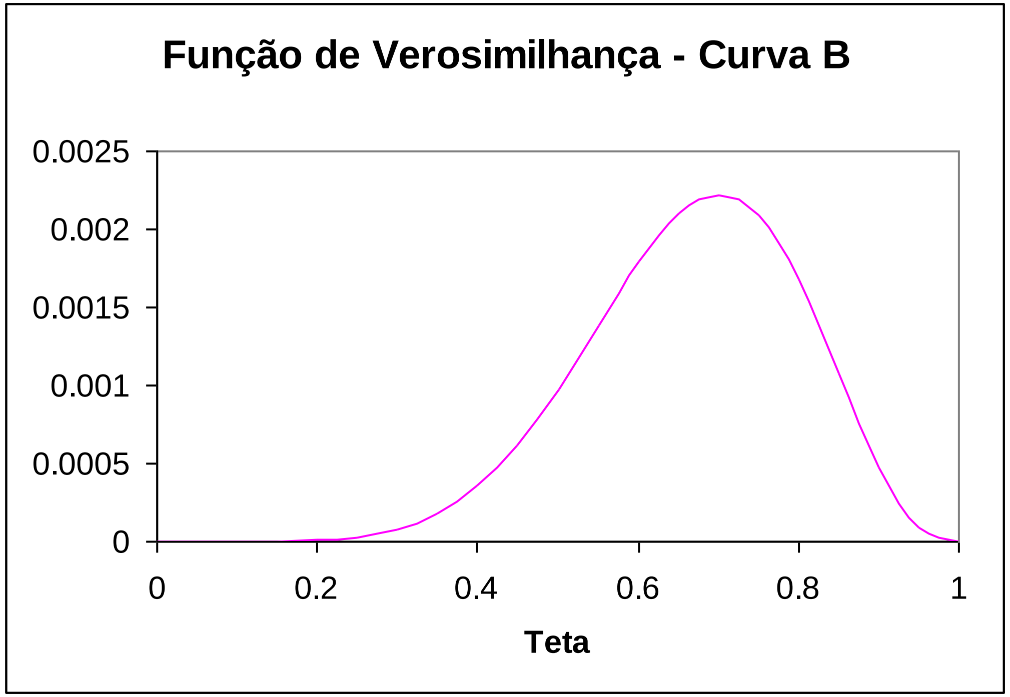


Os valor mais verosímil de θ situa-se em torno de 0.2

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

- B - Observou-se $\sum_{i=1}^{10} x_i = 7 \Rightarrow \text{Curva B} \rightarrow \text{L}(\theta) = \theta^7(1-\theta)^{10-7}$



Os valores mais verosímeis de θ situam-se em torno de 0.7

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

- Intuição: observada uma amostra particular escolhe-se para estimativa do parâmetro o **valor mais verosímil**
- Assim, dado $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, procura-se uma estimativa $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tal que

$$L\left(\hat{\theta}|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right) \geq L(\theta|(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \quad \forall \ \theta \in \mathbf{\Theta}$$

A esta estimativa corresponde o estimador $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

Para encontrar o estimador que maximiza a função de verosimilhança recorre-se aos conhecimentos de Matemática 1 e 2

A obtenção do maximizante segue, geralmente, os passos habituais:

$$\frac{dL(\theta)}{\theta} = 0; \ \frac{d^2L(\theta)}{\theta^2} < 0$$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

Notas:

1. Geralmente é mais fácil trabalhar com a função $l(\theta) = lnL(\theta)$

(como a função logaritmo $l(\theta)$ é monótona crescente $l(\theta)$ e $L(\theta)$ tem o mesmo maximizante).

Então ter-se-á: $\dfrac{dl(\theta)}{\theta} = 0; \ \dfrac{d^2 l(\theta)}{\theta^2} < 0$

2. Cuidado: O maximizante pode não ser um ponto interior do domínio

3. Muito embora o estimador de máxima verosimilhança seja, na maioria das situações práticas, único, nada garante esta unicidade

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

Exemplos:

1. $X \sim B(1,\theta) \Rightarrow L\big(\theta|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i ln(\theta) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) ln(1-\theta)$$

$$l'^{(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta + \theta \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \qquad \text{e} \qquad l''^{(\theta)} < 0$$

O estimador de máxima verosimilhança para θ é $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método da Máxima Verosimilhança

Propriedade fundamental dos estimadores de máxima verosimilhança - Invariância:

Se $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é EMV para θ e $\tau(\theta)$ é função biunívoca de θ, então $\tau(\hat{\theta})$ é EMV para $\tau(\theta)$

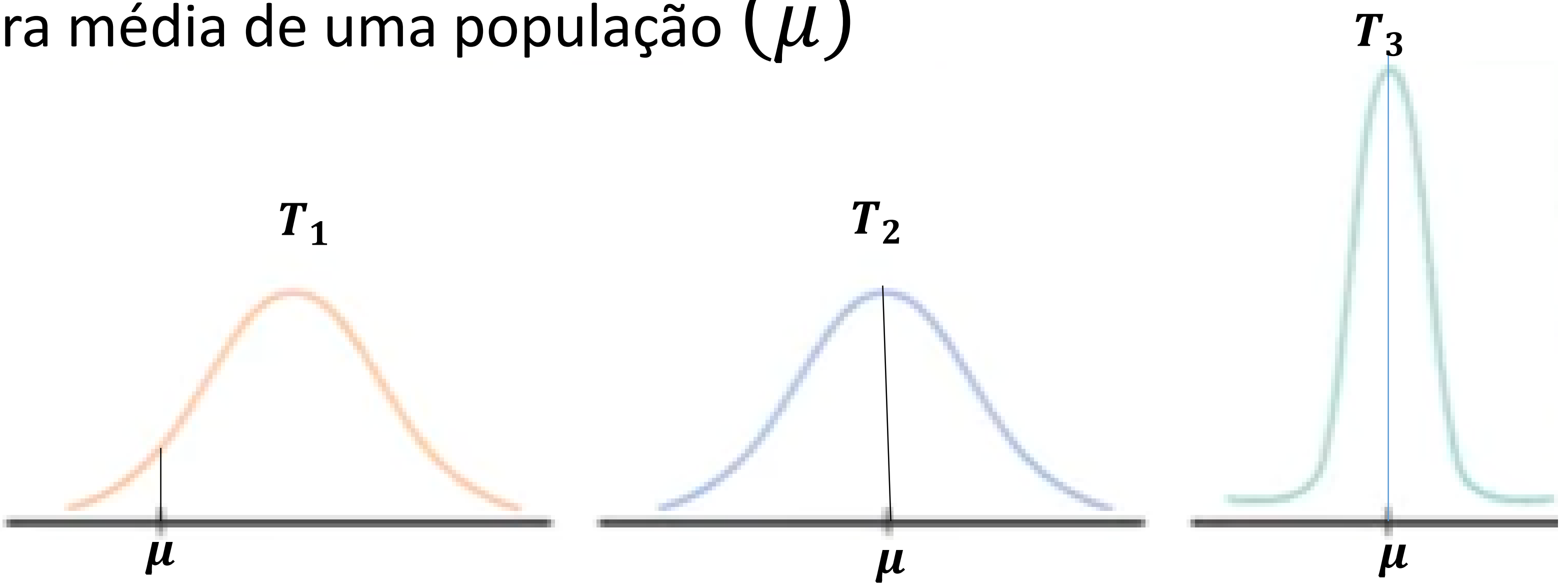
$$X \sim B(1, \theta) \Rightarrow \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{10}) = (0,1,1,0,0,0,1,1,1,0) \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2}$$

$$\tau(\theta) = \mathrm{P}(X = 0) = \theta^0 (1 - \theta)^1 \Rightarrow \tau(\hat{\theta}) = \mathrm{P}(\widehat{X = 0}) = \hat{\theta}^0 \left(1 - \hat{\theta}\right)^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Distribuições por amostragem de 3 diferentes estatísticas para estimar a verdadeira média de uma população (μ)



Qual dos estimadores vos parece melhor entre T_1 e T_2? E entre T_2 e T_3

Como avaliar a qualidade de um estimador?

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador centrado ou não enviesado

Definição: Um estimador $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ para θ diz-se centrado ou não enviesado quando $E(T) = \theta \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

- Observação:
  - O conceito de estimador centrado só se aplica se existir $E(T)$

Enviesamento: Se $E(T) \neq \theta$, então o estimador diz-se enviesado e a diferença $\mathrm{Env}(T) = E(T) - \theta$ mede o enviesamento.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população de Bernoulli $[X_i \sim B(1, \theta)]$. Será $\bar{X}$ um estimador centrado para θ?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) = \frac{1}{n} * n\theta = \theta$$

Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população $N(\mu, \sigma^2)$. Será S^2 um estimador centrado para σ^2?

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \Rightarrow E(S^2) \neq \sigma^2 \text{ e } Env(S^2) = E(S^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\sigma^2/n$$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

Eficiência relativa

- Compara dois estimadores centrados analisando a respectiva dispersão.

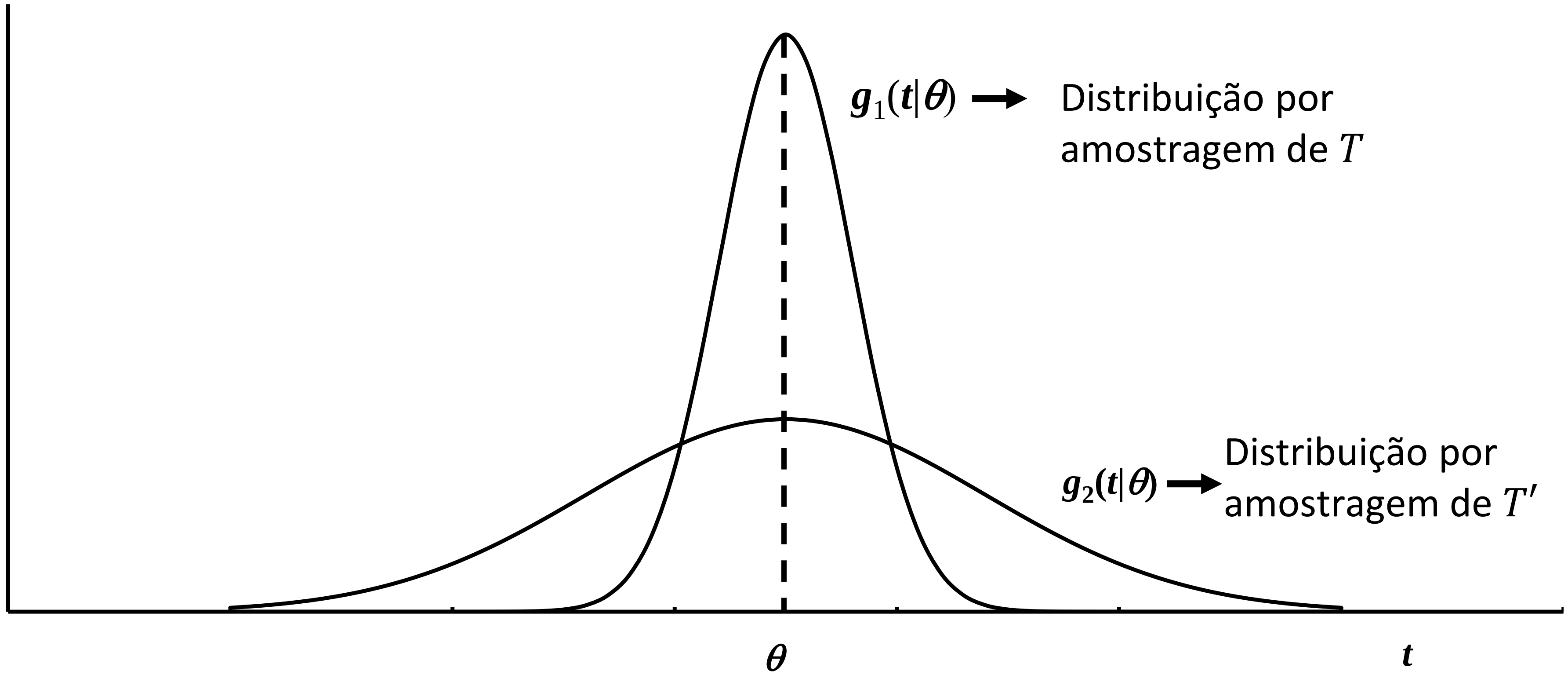
Definição: Sejam T e T' dois estimadores centrados para θ. O estimador T é **mais eficiente** que T' quando $Var(T) \leq Var(T') \ \forall \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

Observação:

A eficiência exige a existência de momentos de 2ª ordem dos estimadores.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores



O estimador T é mais eficiente que T'

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

Eficiência absoluta

Definição: O estimador T é **o mais eficiente** se a condição $Var(T) \leq Var(T')$ se verificar para qualquer outro estimador T' centrado para θ.

Teorema 7.1 - Desigualdade de Frécher-Cramer-Rao:

Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ uma amostra casual de uma população com função densidade\probabilidade $f(x|\theta)$ **satisfazendo certas condições de regularidade** e seja $\mathrm{T}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um estimador centrado para θ.

Então,

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\, I(\theta)}$$

Onde: $I(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial ln\big(f(X|\theta)\big)}{\delta\theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\left[\frac{\delta^2 ln\big(f(X|\theta)\big)}{\delta\theta^2}\right]\right\}$

é a **quantidade de informação de Fisher**

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador Eficiente

Nota: uma das condições de regularidade é que o conjunto $\{x: \quad f(x|\theta) > 0\}$ não depende de θ

Quadro 7.1: Valor de $I(\theta)$para as distribuições mais utilizadas

Distribuição	**Quantidade de informação de Fisher**
$X \sim B(n, \theta)$ θ conhecido	$I(\theta) = n/[\theta(1-\theta)]$
$X \sim P(\lambda)$ λ conhecido	$\mathrm{I}(\lambda) = 1/\lambda$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2conhecido	$I(\mu) = 1/\sigma^2$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ conhecido	$I(\sigma^2) = 1/(2\sigma^4)$
$X \sim G(\alpha, \lambda)$ α conhecido	$I(\lambda) = \alpha/\lambda^2$

Se $Var(T) = QIF$ então tem-se a garantia de que $Var(T) \leq Var(T')$ pelo que T é o estimador mais eficiente para θ.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- **Uma vez que a eficiência está associada ao conceito de estimador centrado, que fazer quando se quer comparar estimadores enviesados?**

Erro quadrático médio

Definição: Seja um estimador $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ para θ. O erro quadrático médio de T é dado por $EQM(T) = E[(T-\theta)^2] = Var(T) + [E(T)-\theta]^2$

- Observações:
  - Se o estimador T é centrado, $EQM(T) = Var(T)$;
  - O estimador T é "melhor" que T' quando $EQM(T) \leq EQM(T')\ \forall\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador consistente
  - Exige-se como condição mínima para um estimador ser um “bom” estimador que a precisão do estimador aumente quando aumenta a dimensão da amostra.

T 7.2: As condições $\lim_{n\to\infty} E(T) = \theta \ e \lim_{n\to\infty} Var(T) = 0$ são suficientes para que T seja estimador (simplesmente) consistente para θ

- Observação:
  - A consistência não é uma propriedade muito selectiva.
  - Um estimador que não seja consistente não deve ser utilizado.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população $Po(\boldsymbol{\lambda})$. O estimador centrado para$\mathrm{T}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \bar{X}$ será um estimador consistente para $\boldsymbol{\lambda}$?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) = \frac{1}{n} * n\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} * n\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n} = 0$$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores obtidos pelo Método dos Momentos

Em condições bastante gerais, são consistentes e possuem distribuição aproximadamente normal quando a dimensão da amostra é muito grande (distribuição assintótica).

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores obtidos pelo Método Máxima Verosimilhança

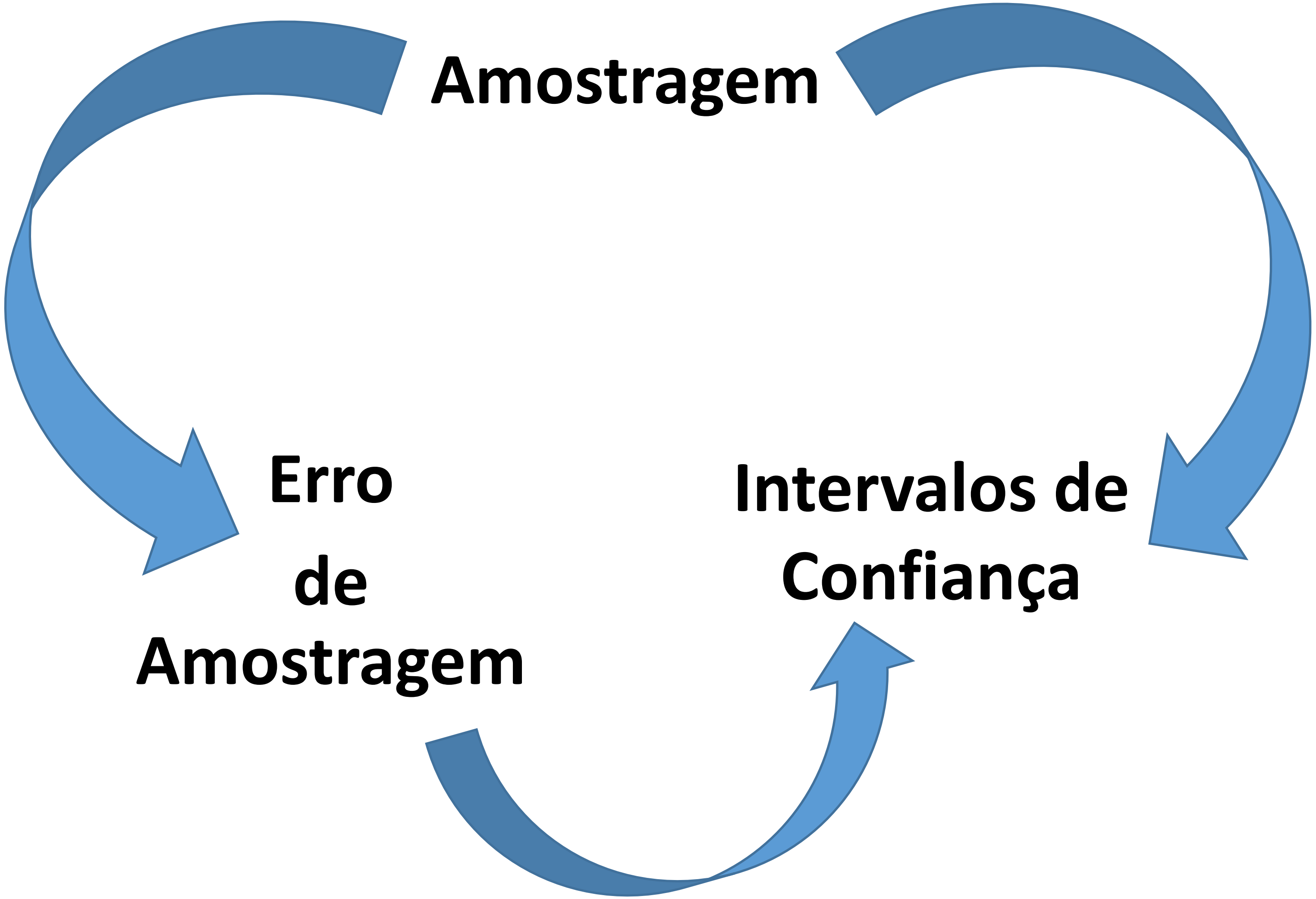
Em condições bastante gerais, são consistentes

Se existir estimador mais eficiente ele é solução única da equação $\frac{dL(\theta)}{\theta} = 0$
e portanto é um estimador da Máxima Verosimilhança

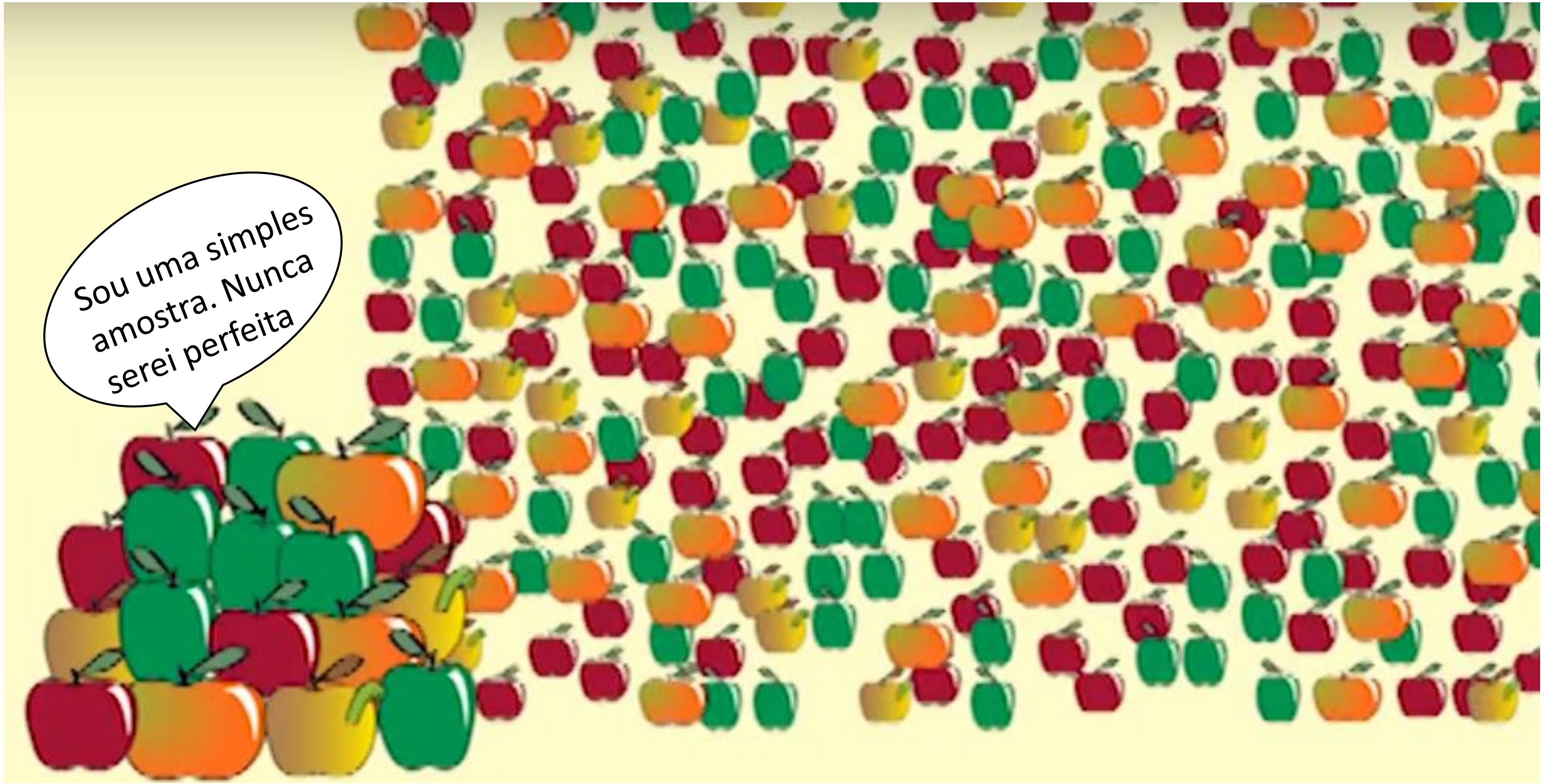
Não são, em geral, centrados

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Estimação por intervalos privilegia a confiança



ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS



ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

VARIABILIDADE DA AMOSTRA

Para diferentes amostras da mesma população as estimativas assumem diferentes valores

ERRO DE AMOSTRAGEM (ε)

Variação devido à amostragem

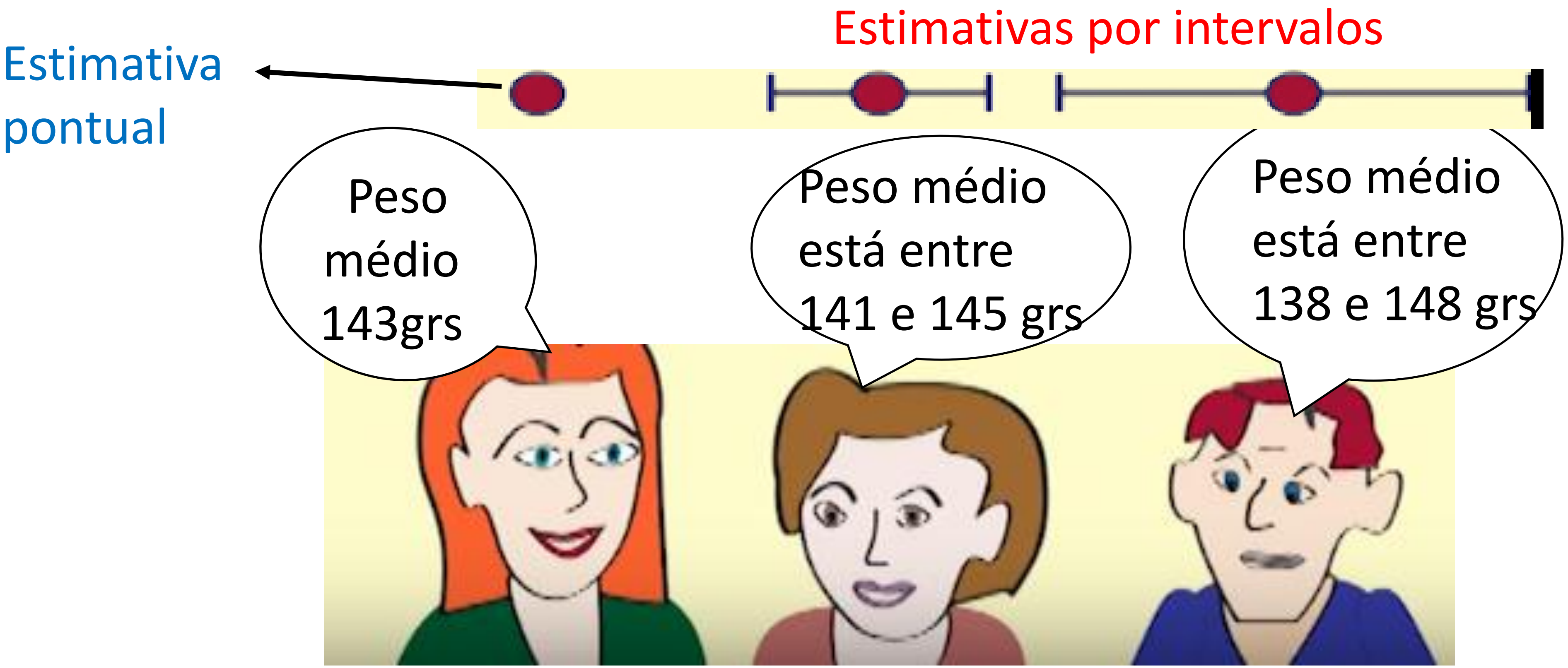
$\bar{x} = 130grs$

$\bar{x} = 149grs$

$\bar{x} = 153grs$

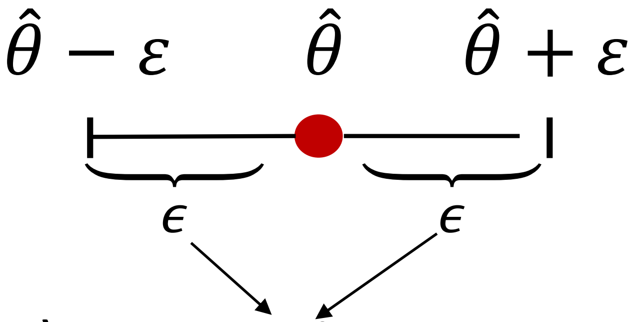
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Quando estimamos um parâmetro de uma população é prática comum exprimir a estimativa sob a forma de um intervalo. O intervalo de confiança indica a **precisão** da estimativa associada a um **grau de confiança** fixado.



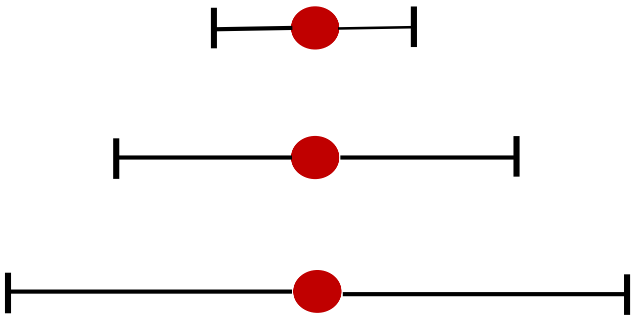
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

O intervalo de confiança $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)$ indica a **precisão** da estimativa associada a um **grau de confiança** fixado.



Erro de amostragem\margem de erro – medida de precisão

O que afecta a amplitude do Intervalo de confiança?

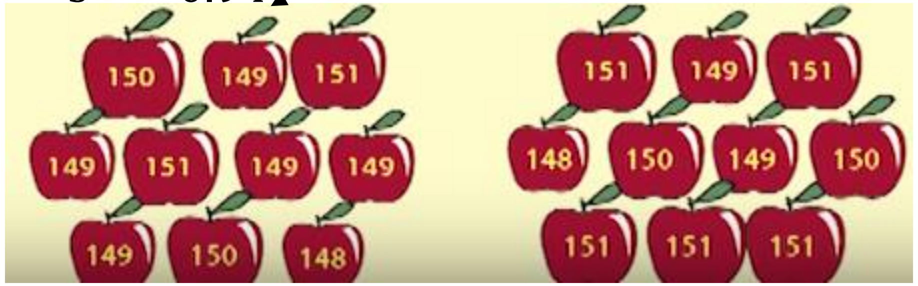


ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

1. Variação na população para mesmo grau de confiança e dimensão da amostra

População com
pequena variação

$s^2 = 0.94$ $s^2 = 1.21$



Intervalos de confiança com
pequena amplitude

População com
grande variação

$s^2 = 152$ $s^2 = 283$

Intervalos de confiança com
grande amplitude

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

2. Variação na dimensão da amostra mesma população, mesmo grau de confiança

$\bar{x} = 160$
$s^2 = 336.6$

$\bar{x} = 165.6$
$s^2 = 380$

Amostras pequenas contém pouca informação e variam mais umas das outras

Intervalos com maior amplitude

$\bar{x} = 160.6$
$s^2 = 15.8$

$\bar{x} = 159.4$
$s^2 = 20.3$

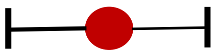
Amostras grandes contém mais informação e variam menos umas das outras

Intervalos com menor amplitude

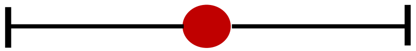
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

3. Variação no grau de confiança, mesma população e dimensão da amostra

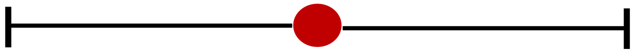
Intervalo de confiança a 90%



Intervalo de confiança a 95%



Intervalo de confiança a 99%



Quanto maior o grau de confiança maior a amplitude do intervalo

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

A média da população varia entre …

A variância da população varia entre …

A proporção na população varia entre …

A diferença entre as médias de duas populações varia entre …

A diferença entre as proporções de duas populações varia entre …

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Cálculo do intervalo de confiança a $(1-\alpha) * 100\%$ para o parâmetro θ

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $f(x, \theta), \theta \in \mathbf{\Theta}$

Intervalo aleatório para θ

Se $T_1 = T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), T_2 = T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $T_1 < T_2$, com

$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \mathbf{\Theta},\ 0 < \alpha < 1$ (α não depende de θ),

Então (T_1, T_2) é um intervalo aleatório para θ de probabilidade $1 - \alpha$.

Intervalo de confiança para θ

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ amostra particular realização de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$t_1 = T_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), t_2 = T_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, valores assumidos por T_1 e T_2

A qualquer intervalo (t_1, t_2) concretização do intervalo aleatório (T_1, T_2) chama-se intervalo de confiança a $(1-\alpha)$*100% para θ

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Cálculo do intervalo de confiança a $(1-\alpha) * 100\%$ para o parâmetro θ

- Comentários:

  - As definições foram apresentadas para θ e não para $\tau(\theta)$ para simplificar a notação. A generalização é imediata.

  - **Só se atribui probabilidade ao intervalo aleatório.**

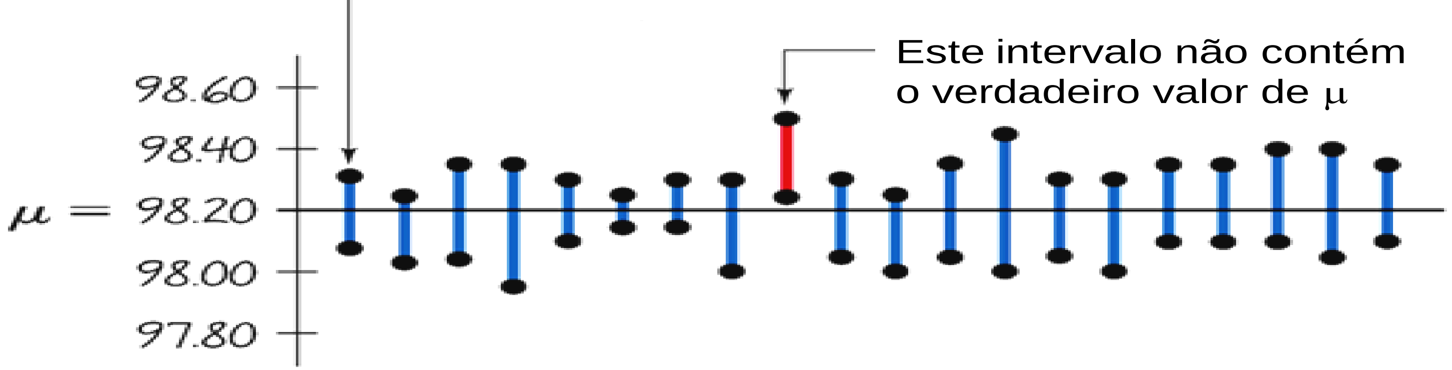
  - O conceito, tal como o vimos, é válido para $\mathbb{R}$. No caso de $\tau(\theta) \in \mathbb{R}^k, \;\; k > 1$ é necessário estendê-lo para **regiões de confiança**.

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Interpretação frequencista do intervalo de confiança

Seleccionadas várias amostras de idêntica dimensão, da população em estudo, e calculados os correspondentes intervalos de confiança, cerca de $100(1 - \alpha)\%$ dos intervalos calculados contêm o verdadeiro valor do parâmetro θ.

20 amostras $\Rightarrow$ 20 I. C. a 95% para μ



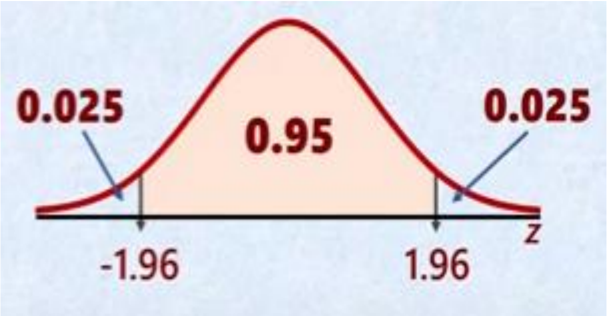
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância conhecida) – Populações normais

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$z_{\alpha/2} : P\left(-z_{\alpha/2} < T < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$-z_{\alpha/2}$ $z_{\alpha/2}$

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Margem de erro

Intervalo confiança para μ a $(1-\alpha) * 100\% = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância conhecida)

Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 605)$

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Seja amostra casual (807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6)$\Rightarrow n = 5,\ \bar{x} = 825{,}84$

Variável fulcral – $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow z_{0.025} = \text{invnorm}(0.025, 0, 1) =$

Margem de erro - ε $= 1.96 \frac{24{,}597}{\sqrt{5}} = 21{,}56 \ \Rightarrow\ \bar{X} - 21{,}56 < \mu < \bar{X} + 21{,}56$

Intervalo aleatório para $\mu = (\bar{X} - 21{,}56 < \mu < \bar{X} + 21{,}56)$

Intervalo confiança para $\mu = (825.84 - 21.56,\ 825.84 + 21.56) = (804.28,\ \ 847.4)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Efeito da dimensão da amostra na amplitude do Intervalo de confiança para a média

Exemplo (continuação): População $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 605)$

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Amostra anterior: $n = 5$, $\bar{x} = 825{,}84$

$I.C.$ para $\mu = (804.28, \;\; 847.4)$

Amplitude do $I.C. = 43.12$

Amplitude do intervalo de confiança reduz-se quando aumenta a dimensão da amostra

Amostra:

$$\begin{Bmatrix} 807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6, \\ 798.6, 812.2, 813.1, 839.4, 812.8 \end{Bmatrix}$$

$n = 10$, $\bar{x} = 820.53$

$I.C.$ para $\mu = (805.28, \;\; 835.78)$

Amplitude do $I.C. = 30.49$

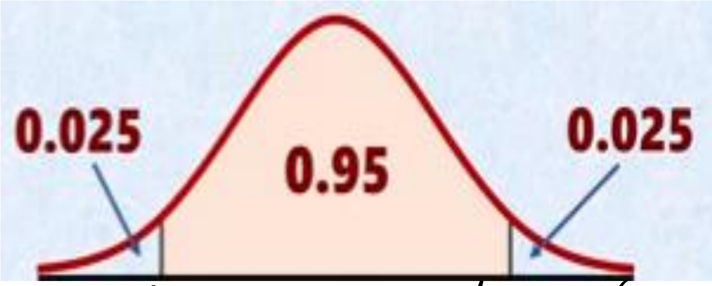
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida) – Populações normais

Grau\nível de confiança= $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$t_{\alpha/2}: P\left(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$$-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}}$$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\mu = \left(\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s'}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s'}{\sqrt{n}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida)

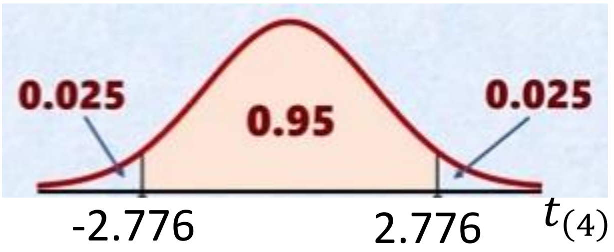
Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 desconhecidos

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Seja amostra casual (807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6)$\Rightarrow n = 5,\ \bar{x} = 825{,}84, s' = 29.352$

Variável fulcral $- T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s'/\sqrt{n}} \sim t\left(\underbrace{5-1}_{4}\right)$

$$\Rightarrow t_{(4)}^{0.025} = \text{invt}(0.025, 4) = 2.776$$



Margem de erro - $\varepsilon = 2.776 \dfrac{29.352}{\sqrt{5}} = 36.44 \Rightarrow \bar{X} - 36.44 < \mu < \bar{X} + 36.44$

Intervalo aleatório para $\mu = (\bar{X} - 36.44 < \mu < \bar{X} + 36.44)$

Intervalo confiança para $\mu = (825{,}84 - 36.44,\ 825.84 - 36.44) = (789.40,\ \ 862.28)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Efeito da variação do grau de confiança na amplitude do Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida)

Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 desconhecidos

Amostra anterior: $n = 5$, $\bar{x} = 825{,}84$, $s' = 29.352$

Grau de confiança $= 0.95$	Grau de confiança$= 0.99$
$\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$	$\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.99 \Leftrightarrow \alpha = 0.01$
$t_{(4)}^{0.025} = 2.776$	$t_{(4)}^{0.005} = 4.604$
$I.C.$ para $\mu = (789.40,\ 862.28)$	$I.C.$ para $\mu = (765.40,\ \ 886.28)$
Amplitude do $I.C. = 72.88$	Amplitude do $I.C. = 120.87$

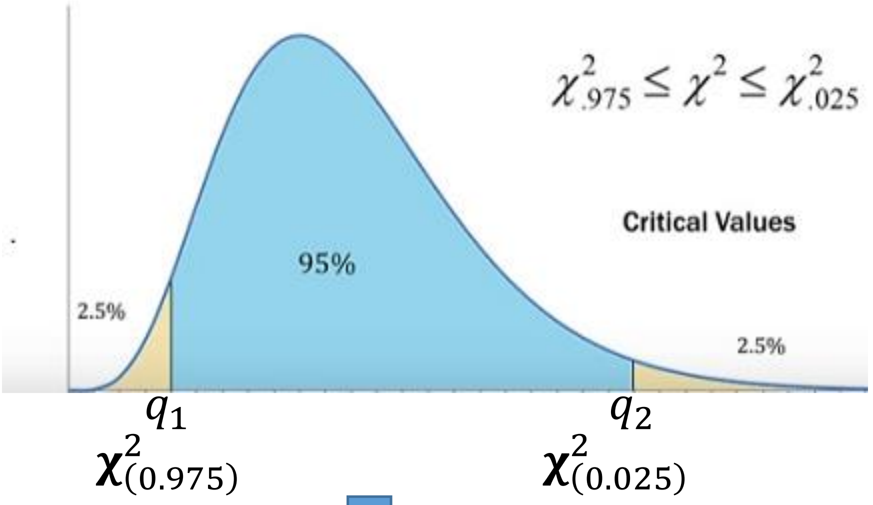
A amplitude do intervalo de confiança aumenta quando se aumenta o grau de confiança

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$



$$q_1 < \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} < q_2$$

$$\frac{(n-1)S'^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S'^2}{q_1}$$

Intervalo aleatório para $\sigma^2 = \left(\dfrac{(n-1)S'^2}{q_1}, \dfrac{(n-1)S'^2}{q_2}\right)$

Intervalo confiança para $\sigma^2 = \left(\dfrac{(n-1)s'^2}{q_1}, \dfrac{(n-1)s'^2}{q_2}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo: Ao investir em acções, geralmente há um trade-off: risco vs rendimento.

Em termos financeiros, "risco" é sinónimo de variância no valor das acções.

Algumas acções são estáveis (baixo risco), mas oferecem baixos retornos potenciais (GE), outras variam descontroladamente (maior risco), mas oferecem retornos potenciais mais elevados (Apple).

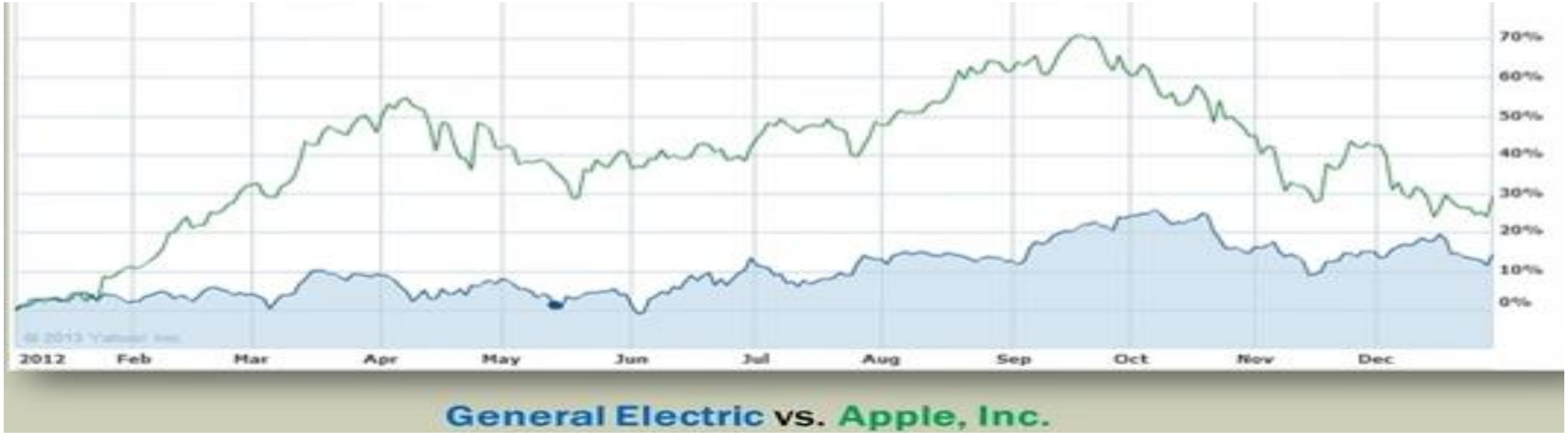
Suponham que compramos acções da GE e da Apple e as mantemos por um ano.

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

Rendimentos das acções em percentagem



Pense em cada tipo de acção como um vôo. Qual o vôo que vos deixará mais enjoados devido à turbulência?

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

Date	GE	APPL	GE%	AAPL%
January 2012	0.043869	0.119655	4.39%	11.97%
February 2012	0.026947	0.172533	2.69%	17.25%
March 2012	0.051809	0.100103	5.18%	10.01%
April 2012	-0.02451	-0.026306	-2.45%	-2.63%
May 2012	-0.02567	-0.010762	-2.57%	-1.08%
June 2012	0.096491	0.010796	9.65%	1.08%
July 2012	-0.00444	0.044801	-0.44%	4.48%
August 2012	-0.00198	0.089724	-0.20%	8.97%
September 2012	0.099801	0.002791	9.98%	0.28%
October 2012	-0.07535	-0.113841	-7.53%	-11.38%
November 2012	0.003376	-0.012450	0.34%	-1.25%
December 2012	0.002404	-0.095123	0.24%	-9.51%
Mean	0.016063	0.023493	1.61%	2.35%
Variance	0.002590	0.007330	25.89	73.30
Standard Dev.	0.050890	0.085618	5.09%	8.56%

Mean Monthly Return

GE = 1.61% AAPL = 2.35%

Monthly Return Variance, s^2

GE = 25.89 AAPL = 73.30

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.025}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.975}}$$

n = sample size

s^2 = sample variance

$$\chi^2_{.975} \le \chi^2 \le \chi^2_{.025}$$

$$3.82 \le \chi^2 \le 21.92$$

Critical Values

Monthly Return Variance, s^2

GE = 25.89

$$\frac{(12-1)25.89}{21.92} \le \sigma^2 \le \frac{(12-1)25.89}{3.82}$$

$$12.99 \le \sigma^2 \le 74.55$$

$$3.60\% \le \sigma \le 8.63\%$$

AAPL = 73.30

$$\frac{(12-1)73.30}{21.92} \le \sigma^2 \le \frac{(12-1)73.30}{3.82}$$

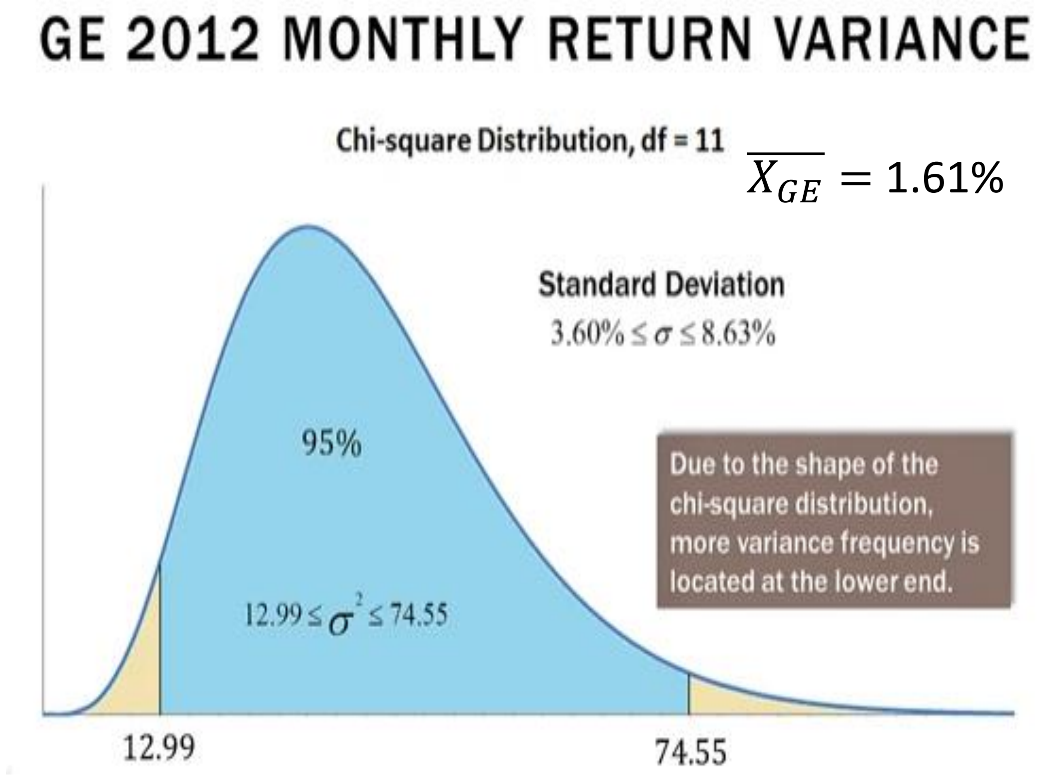
$$36.78 \le \sigma^2 \le 211.07$$

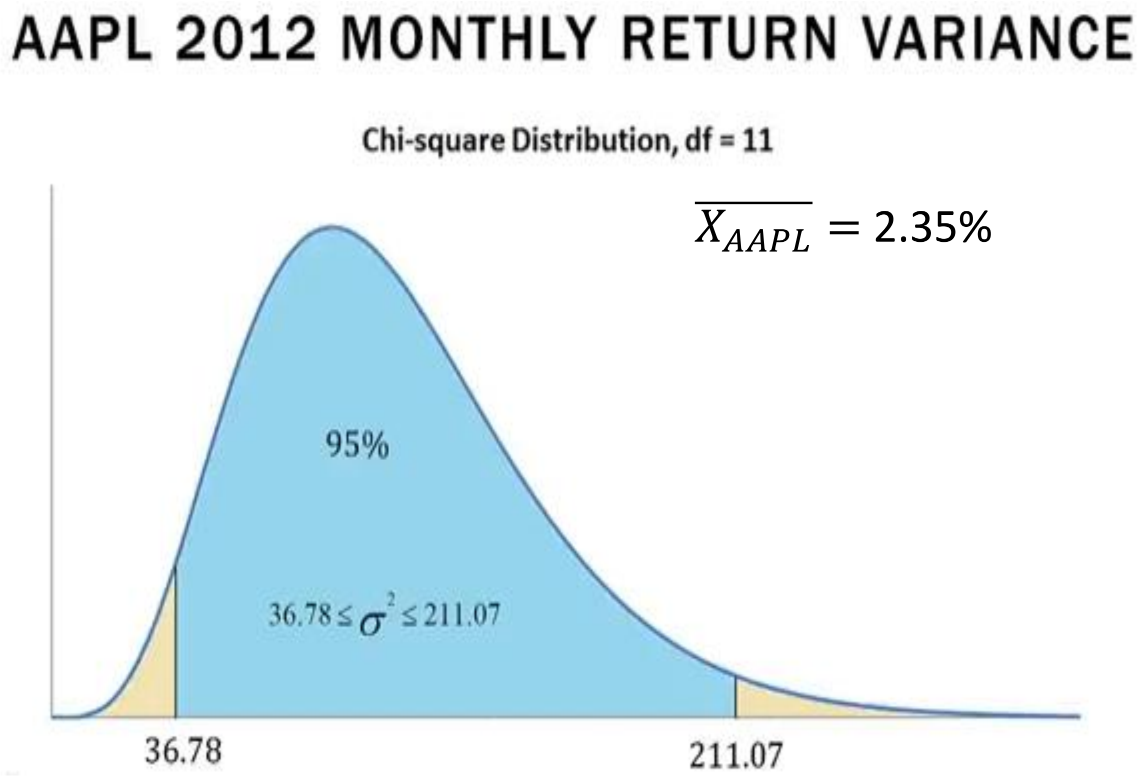
$$6.06\% \le \sigma \le 14.53\%$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):





Amplitude do Intervalo = 61.56

Amplitude do Intervalo = 174.29

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a diferença de médias – Populações normais

Variâncias conhecidas

População X - $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$$\overbrace{(X_1, X_2, \cdots, X_m)}^{amostra\ da\ população\ X}$$

$\bar{x}$

População Y - $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$\overbrace{(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)}^{amostra\ da\ população\ Y}$$

$\bar{y}$

Variável fulcral: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$

Intervalo Confiança para $\mu_X - \mu_Y$ a $100 * (1 - \alpha)\%$:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) - z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}, (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}} \right)$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a diferença de médias – Populações normais

Variâncias desconhecidas

População X - $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

População Y - $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$\underbrace{\sigma_X^2 = \sigma_Y^2}_{sup\tilde{o}e-se}$$

$$\overbrace{(X_1, X_2, \cdots, X_m)}^{amostra\ da\ popula\c{c}\tilde{a}o\ X}$$

$\bar{x}$ e $s_X'^2$

$$\overbrace{(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)}^{amostra\ da\ popula\c{c}\tilde{a}o\ Y}$$

$\bar{y}$ e $s_Y'^2$

Variável fulcral: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{(m-1)s_X'^2 + (n-1)s_Y'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$

Intervalo Confiança para $\mu_X - \mu_Y$ a $100 * (1-\alpha)\%$:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) - t_{\alpha/2} * \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{(m-1)s_X'^2 + (n-1)s_Y'^2}{m+n-2}} + (\bar{x} - \bar{y}) - t_{\alpha/2} * \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{(m-1)s_X'^2 + (n-1)s_Y'^2}{m+n-2}} \right)$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a relação entre variâncias – Populações normais

População X - $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

População Y - $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$\overbrace{(X_1, X_2, \cdots, X_m)}^{amostra\ da\ população\ X}$

$\overbrace{(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)}^{amostra\ da\ população\ Y}$

${s'}_X^2$

${s'}_Y^2$

Variável fulcral: $F = \frac{{s'}_X^2}{{s'}_Y^2} * \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim F(m-1, n-1)$

Intervalo Confiança para σ_Y^2 / σ_X^2 a $100 * (1-\alpha)\%$: $\left(f_{1,\alpha/2} * \frac{{s'}_Y^2}{{s'}_X^2}, f_{2,\alpha/2} * \frac{{s'}_Y^2}{{s'}_X^2} \right)$

$f_{1,\alpha/2}: P\left(F < f_{1,\alpha/2}\right) = \alpha/2;\ f_{2,\alpha/2}: P\left(F > f_{2,\alpha/2}\right) = \alpha/2\ com\ F \sim F(m-1, n-1)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a relação entre variâncias – Populações normais

- Exerc. 46 livro

  Comparar a variação da autonomia da bateria nos dois modelos

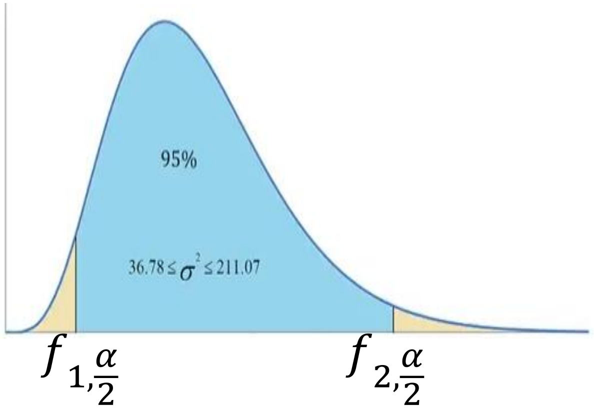
	Nº aparelhos	Duração da carga da bateria	
	Observados	Média	Desvio padrão corrigido
Modelo A	40	6.5	3
Modelo B	50	5.5	2.5

1. Determinação do Intervalo de confiança para o quociente das variâncias

$$IC^{95\%}_{\sigma_A^2/\sigma_B^2} = \left(f_{1,\frac{\alpha}{2}} * {s'}_A^2/{s'}_B^2, f_{2,\frac{\alpha}{2}} * {s'}_A^2/{s'}_B^2\right) = \left(0.5416 * 3^2/2.5^2, 1.808 * 3^2/2.5^2\right) = (0.7799, 2.6038)$$

$$f_{1,\frac{\alpha}{2}}: P\left(F^{0.025}_{(40-1,50-1)} < f_{1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.025 \Rightarrow f_{1,\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{F.INV}(0.025, 39{,}49) = 0.5416$$

$$f_{2,\frac{\alpha}{2}}: P\left(F^{0.025}_{(40-1,50-1)} > f_{2,\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{0.05}{2} \Rightarrow f_{2,\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{F.INV}(0.025, 39{,}49) = 1.808$$



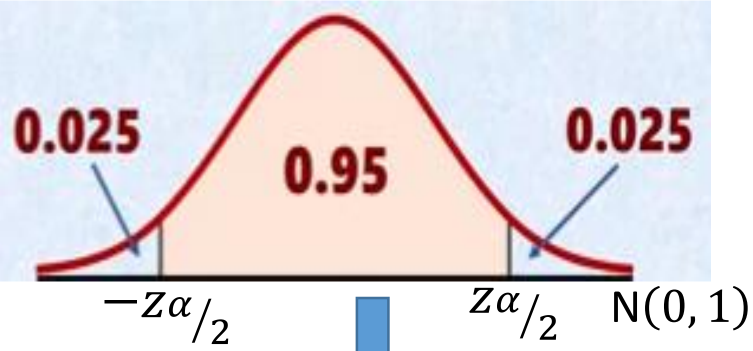
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança – Grandes amostras

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \theta}{S'/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$

$z_{\alpha/2} : P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \theta}{S'/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n}$$

Intervalo aleatório para $\theta = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n}\right)$

Intervalo confiança para $\boldsymbol{\theta} = \left(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n}, \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\, S'/\sqrt{n}\right)$

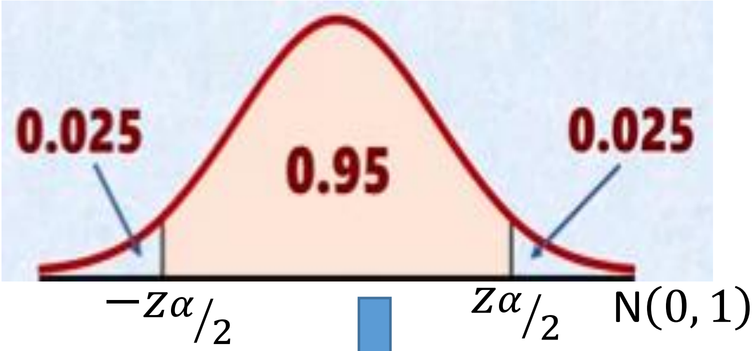
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a proporção – Populações Bernoulli

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$z_{\alpha/2} : P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

Intervalo aleatório para $\theta = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\boldsymbol{\theta} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Exerc.41. $X \sim B(1, \theta)$ $\quad IC_{\theta}^{90\%}$=? $\quad (X_1, X_2, \cdots, X_{200})$ $\sum_{i=1}^{200} x_i = 50$ $\quad \bar{x} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

Variável Fulcral $Z = \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

Grau\nível de confiança= $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}$=0.05

$z_{\alpha/2}: P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ $\quad z_{\alpha/2} = P(Z < -z_{\alpha/2}) = 0.05$ $\quad z_{\alpha/2} = norm.inv.s(0.05) = -1.645$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

$$\boldsymbol{IC_{\theta}^{90\%} = \left(0.25 - 1.645\sqrt{\frac{0.25*0.75}{200}}, 0.25 + 1.645\sqrt{\frac{0.25*0.75}{200}},\right) = (0.1996, 0.3004)}$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a diferença de proporções – Populações Bernoulli

População $X \sim B(1, \theta_X)$

$\overbrace{(X_1, X_2, \cdots, X_m)}^{amostra\ da\ população\ X}$

$\bar{x}$

População $Y \sim B(1, \theta_Y)$

$\overbrace{(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)}^{amostra\ da\ população\ Y}$

$\bar{y}$

Variável fulcral: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\theta_X - \theta_Y)}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{m} + \dfrac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n}}} \sim N(0,1)$

Intervalo Confiança para $\theta_X - \theta_Y$ a $(1-\alpha) * 100\%$:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) - z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{m} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n}}, (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{m} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n}} \right)$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média – Populações Poisson

Grau\nível de confiança= $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$z_{\alpha/2}: P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} < \lambda < \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$$

Intervalo aleatório para $\lambda = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\lambda = \left(\boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{\bar{x}}}{\boldsymbol{n}}}, \boldsymbol{\bar{x}} + \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{\bar{x}}}{\boldsymbol{n}}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Exerc.47.

$X\sim$ nº componentes defeituosos produzidas por dia (8horas) por uma máquina $X \sim Po(2)$

$X\sim$ nº componentes defeituosos produzidas por dia (8horas) pela nova máquina $X \sim Po(\lambda)$

$(X_1, X_2, \cdots, X_{30})$ $\sum_{i=1}^{30} x_i = 40$ $\bar{x} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} = 1.3333$

Variável Fulcral $Z = \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$ Grau\nível de confiança$= 1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}$=0.005

$z_{\alpha/2}: P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ $z_{\alpha/2} = P(Z < z_{\alpha/2}) = 0.995$ $z_{\alpha/2} = norm.inv.s(0.995) = 2.5758$

Intervalo aleatório para $\lambda = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)$

$$IC_{\lambda}^{99\%} = \left(1.3333 - 2.5758\sqrt{\frac{1.3333}{30}}, 1.3333 + 2.5758\sqrt{\frac{1.3333}{30}},\right) = (\mathbf{0.7903}, \mathbf{1.8764})$$